

TD1. Ensembles, relations.

Exercice 1.

- (1) Montrer que $(\bar{A} \cap B) \cup (\bar{A} \cap \bar{B}) \cup (A \cap B) = \bar{A} \cup B$.
- (2) Que peut-on dire de deux ensembles A et B tel que $A \cap B = A \cup B$?
- (3) Montrer que $A \cap C = A \cup B \iff B \subset A \subset C$.
- (4) Montrer que $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ ne peut s'écrire comme produit cartésien de deux parties de $\mathbb{R}$.
- (5) Montrer que $(E \times F) \cup (G \times F) = (E \cup G) \times F$.
- (6) Montrer que $(E \times F) \cap (G \times H) = (E \cap G) \times (F \cap H)$.

Exercice 2.

Soit $f: E \rightarrow F$ et $g: F \rightarrow G$ deux applications. Montrer que

- (1) si $g \circ f$ est injective alors f est injective.
- (2) si $g \circ f$ est surjective alors g est surjective.
- (3) si $g \circ f$ est surjective et g injective alors f est surjective.
- (4) si $g \circ f$ est injective et f surjective alors g est injective.

Exercice 3.

Soient E, E' deux ensembles, $f: E \rightarrow E'$. Soient $A, B \subset E$ et $A', B' \subset E'$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (1) f est surjective
- (2) $\forall y \in E', f(f^{-1}(\{y\})) = \{y\}$
- (3) $\forall A' \subset E', f(f^{-1}(A')) = A'$.
- (4) $\forall A' \subset E', (f^{-1}(A') = \emptyset \Rightarrow A' = \emptyset)$.

Répondre aux questions suivantes :

- (1) A-t-on $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$?
- (2) A-t-on $A = f^{-1}(f(A))$? $f(f^{-1}(A')) = A$?
- (3) A-t-on $f^{-1}(A' \Delta B') = f^{-1}(A') \Delta f^{-1}(B')$?
- (4) A quelle condition sur f a-t-on $f(A \Delta B) = f(A) \Delta f(B)$?

Exercice 4.

- (1) Soient E, F des ensembles, $f: E \rightarrow F$ une application et $A \subset E, B \subset F$. Montrer que $f(A \cap f^{-1}(B)) = f(A) \cap B$.
- (2) On considère sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ la relation d'équivalence définie par

$$(a, n) \mathcal{R} (b, m) \iff am = bn.$$

Soit $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ avec $p \wedge q = 1$. Déterminer la classe d'équivalence de (p, q) .

- (3) On considère a un réel strictement positif.

- (a) Montrer que la relation $\mathcal{R}$ définie sur $\mathbb{R}$ par $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x - y \in a\mathbb{Z}$ est une relation d'équivalence.
- (b) Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, il existe une bijection entre $[\alpha, \alpha + a[$ et $\mathbb{R}/\mathcal{R}$.

Exercice 5.

On considère sur $\mathbb{R}^2$ la relation $\mathcal{R}$ définie par

$$(x, y)\mathcal{R}(a, b) \iff x - nb = a - ny$$

avec $n \in \mathbb{N}$.

- (1) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}^2$.
- (2) Déterminer les classes des couples $(0, 0)$, $(1, 3)$.
- (3) Montrer que l'application $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $(x, y) \mapsto x + ny$ est surjective. Que peut-on en déduire pour $\mathbb{R}^2/\mathcal{R}$ et $\mathbb{R}$?

Exercice 6.

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

- (1) Soit E un ensemble et $A \subset E$. On considère l'application $f: \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(A)$ définie par $X \mapsto A \cap X$.
 - (a) Montrer que f est surjective.
 - (b) Montrer que f est injective si et seulement si $A = E$
- (2) Soit E un ensemble et $A \subset E$. On considère sur $\mathcal{P}(E)$ la relation $\mathcal{R}$ définie par

$$B \mathcal{R} C \iff B \Delta C \subset A$$

- (a) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
- (b) Montrer que $K \subset A \implies B \mathcal{R} ((B \cap \complement_E A) \cup K)$

On rappelle que $B \Delta C = (B \setminus C) \cup (C \setminus B) = (B \cup C) \setminus (B \cap C)$.

Exercice 7.

Soit E un ensemble et A une partie de E . On définit sur $\mathcal{P}(E)$ la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ pour tout $X, Y \in \mathcal{P}(E)$ par :

$$X\mathcal{R}Y \iff X \cap A = Y \cap A$$

- (1) Expliciter les classes d'équivalence suivantes : $\text{cl}(\emptyset)$, $\text{cl}(E)$, $\text{cl}(A)$, $\text{cl}(\complement_E^A)$.
- (2) Montrer que $X \cap A$ est un représentant de $\text{cl}(X)$ contenu dans A .
- (3) Montrer que si B est un représentant de $\text{cl}(X)$ contenu dans A alors B est égal à $X \cap A$.
- (4) Quelle conclusion peut-on déduire des questions (2) et (3).
- (5) Montrer que l'application

$$\varphi: \mathcal{P}(E)/\mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{P}(A), \quad \text{cl}(X) \longmapsto \varphi(\text{cl}(X)) = X \cap A$$

est bien définie et bijective.

Exercice 8.

- (1) Soit $E = \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ muni de la relation d'ordre de divisibilité. Calculer $\sup(n, m)$ et $\inf(n, m)$.
- (2) Soit $E = \mathbb{Q}$ muni de la relation d'ordre usuel $\leq$ et $A = \{x \in \mathbb{Q}^+ \mid x^2 < 2\}$. Déterminer $\text{Maj}_E(A)$. L'ensemble A admet-il une borne supérieure? Justifier la réponse.
- (3) Soit $(E, \preceq)$ un ensemble ordonné, A, B , deux parties de E tel que $A \subset B$. Montrer que si A et B admettent des bornes supérieures dans E alors $\sup_E(A) \preceq \sup_E(B)$.

Exercice 9.

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

- (1) Soient A, B, C des parties d'un ensemble E . Montrer que

$$(A \Delta B) \cap C = (A \cap C) \Delta (B \cap C).$$
- (2) Déterminer $f^{-1}([-3, 3])$ pour la fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$.
- (3) Soient E, F des ensembles, $f: E \rightarrow F$ une application et $A \subset E, B \subset F$. Montrer que $f(A \cap f^{-1}(B)) = f(A) \cap B$.
- (4) Soit E un ensemble. On définit sur $\mathcal{P}(E)$ la relation $\mathcal{R}$ par

$$A \mathcal{R} B \iff A = B \text{ ou } A = \bar{B}.$$

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathcal{P}(E)$.

Exercice 10.

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

- (1) Soient E, F deux ensembles, $A \subset E, B \subset F$ et $f: E \rightarrow F$ une application. Montrer que $f(A) \cap B = \emptyset \iff A \cap f^{-1}(B) = \emptyset$.
- (2) Soit E un ensemble. Pour $A \subset E$ on note $\bar{A}$ son complémentaire dans E . La fonction $f: \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E)$ définie par $A \mapsto \bar{A}$ est-elle injective, surjective? Justifier la réponse.
- (3) On définit sur $\mathbb{N}^*$ la relation $\mathcal{R}$ par

$$p \mathcal{R} q \iff \exists k \in \mathbb{N}^*, q = p^k.$$

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}^*$. L'ordre est-il total? Déterminer les majorants de $\{2, 3\}$ pour cet ordre.

Exercice 11.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- (1) Montrer que la relation définie sur $\mathbb{Z}$ par

$$x \mathcal{R} y \iff n \mid (x - y)$$

est une relation d'équivalence. Décrire $\bar{x}$ la classe de x modulo cette relation (appelée congruence modulo n) et l'ensemble-quotient $\mathbb{Z}/\mathcal{R}$ noté $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

- (2) Montrer que $\bar{x} = \bar{r}$ avec r désignant le reste de la division euclidienne de x par n .
- (3) Montrer que l'application $\gamma_n: \llbracket 1, n-1 \rrbracket \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ définie par $x \mapsto \bar{x}$ est bijective. En déduire le cardinal de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Exercice 12.

Soient E un ensemble, $A, B \in \mathcal{P}(E)$ et l'application $f: \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ définie par

$$f(X) = (X \cap A, X \cap B).$$

- (1) Montrer que f injective $\iff A \cup B = E$.
- (2) Montrer que f surjective $\iff A \cap B = \emptyset$.
- (3) A quelle condition f est-elle bijective ? Expliciter alors f^{-1} .